5.(1)

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{M_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_{M_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{M_3}$$

Primero normalizo las columnas de la primera matriz ya que no tienen norma = 1. Al hacer esto tengo que multiplicar la fila i de la matriz central por el número por el cual dividí la columna i de la primera matriz.

Entonces queda:

$$M_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \text{Matriz } U \text{ de la DVS.}$$

Luego

$$M_2 = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora tengo que normalizar M_3 siguiendo el mismo procedimiento.

$$M_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \text{Matriz } V^T \text{ de la DVS}$$

y M_2 queda:

$$M_2 = \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \end{bmatrix} = \text{Matriz } \Sigma \text{ de la DVS}$$

Por lo tanto queda la DVS:

$$A = \underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \end{array}}_{U} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}}_{V^T}$$

Con
$$V = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{-2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix} \end{array}$$

Por lo tanto los valores singulares de A son:

$\boxed{\sigma_1 = 18}$ y $\boxed{\sigma_2 = 12}$ entonces rango $A = 2$ $(r = 2)$

Sabemos que $V = [v_1 \ v_2 \ v_3]$ y $U = [u_1 \ u_2]$

~~[illegible]~~ $V_r = [v_1 \ v_2]$ $V_{n-r} = [v_3]$

$U_r = [u_1 \ u_2]$

$\begin{cases} V_r \text{ es BON de fil}(A) \\ V_{n-r} \text{ es BON de Nul}(A) \\ U_r \text{ es BON de col}(A) \\ \text{Nul}(A^T) = \{0\}. \end{cases}$

$$P_{Fil(A)} = V_r \cdot V_r^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{8}{9} \end{bmatrix}$$

$$P_{Nul(A)} = V_{m-r} V_{m-r}^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & \frac{-4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{-4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{-2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

$$P_{Null(A^T)} = 0$$

$$P_{Col(A)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6) como el rango$A = 2$:

<u>DVS RED:</u>

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$